

راه حل مسابقه‌ی ریاضی کانگورو ۲۰۱۷

راه حل مسئله‌های سه امتیازی

۱. (ب) توجه کنید که در هر یک از گزینه‌های «الف»، «ج»، «د» و «ه» تنها جای دو کارت عوض شده و جای دو کارت دیگر ثابت باقی مانده است. اما در گزینه‌ی «ب»، جای هر سه کارت ۱، ۳ و ۹ تغییر کرده است که با توجه به صورت سؤال، امکان‌پذیر نیست.

۲. (ج)

$$(3 \times 6) + (2 \times 8) = 18 + 16 = 34$$

سه حشره و دو عنکبوت روی هم ۳۴ پا دارند.

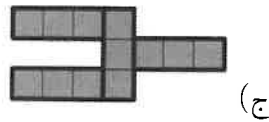
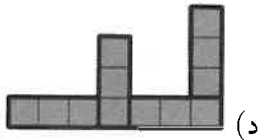
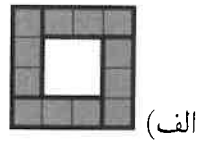
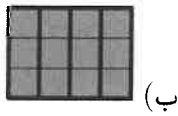
۹ جوجه روی هم ۱۸ پا دارند.

$$9 \times 2 = 18$$

$$34 - 18 = 16$$

$$16 \div 4 = 4$$

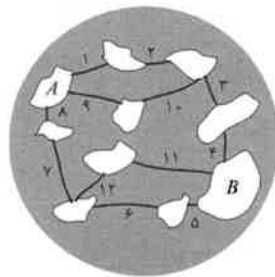
۳. (ه) بررسی سایر گزینه‌ها:



۴. (د)

$$\begin{aligned}
 1111 \times 2222 &= 1111 \times (1111 \times 2) \\
 &\quad \downarrow \\
 &1111 \times 2 \\
 &= (1111 \times 1111) \times 2 \\
 &\quad \downarrow \\
 &1234321 \\
 &= 1234321 \times 2 = 2468642
 \end{aligned}$$

۵. (ب)



برای اینکه از A به B برویم، راه‌های زیر وجود دارند:

$$A \rightarrow 1, 2, 3, 4 \rightarrow B$$

$$A \rightarrow 9, 10, 3, 4 \rightarrow B$$

$$A \rightarrow ۸, ۷, ۶, ۵ \rightarrow B$$

$$A \rightarrow ۸, ۷, ۱۲, ۱۱ \rightarrow B$$

برای اینکه از A به B راهی نباشد، باید پل‌های زیر به صورت هم‌زمان بسته شوند.

حالت ۱: پل‌های ۱ و ۹ و ۸ ← تعداد آن‌ها ۳ پل است.

حالت ۲: پل‌های ۱ و ۹ و ۷ ← تعداد آن‌ها ۳ پل است.

حالت ۳: پل‌های ۲ و ۱۰ و ۸ ← تعداد آن‌ها ۳ پل است.

حالت ۴: پل‌های ۲ و ۱۰ و ۷ ← تعداد آن‌ها ۳ پل است.

حالت ۵: پل‌های ۳ و ۸ ← تعداد آن‌ها ۲ پل است.

حالت ۶: پل‌های ۴ و ۸ ← تعداد آن‌ها ۲ پل است.

حالت ۷: پل‌های ۳ و ۷ ← تعداد آن‌ها ۲ پل است.

حالت ۸: پل‌های ۴ و ۷ ← تعداد آن‌ها ۲ پل است.

حالت ۹: پل‌های ۵ و ۱۱ و ۴ ← تعداد آن‌ها ۳ پل است.

حالت ۱۰: پل‌های ۵ و ۱۱ و ۳ ← تعداد آن‌ها ۳ پل است.

حالت ۱۱: پل‌های ۶ و ۱۲ و ۴ ← تعداد آن‌ها ۳ پل است.

حالت ۱۲: پل‌های ۶ و ۱۲ و ۳ ← تعداد آن‌ها ۳ پل است.

حالت ۱۳: پل‌های ۲ و ۱۰ و ۱۱ و ۵ ← تعداد آن‌ها ۴ پل است.

حالت ۱۴: پل‌های ۲ و ۱۰ و ۶ و ۱۲ ← تعداد آن‌ها ۴ پل است.

حالت ۱۵: پل‌های ۱ و ۹ و ۵ و ۱۱ ← تعداد آن‌ها ۴ پل است.

حالت ۱۶: پل‌های ۱ و ۹ و ۶ و ۱۲ ← تعداد آن‌ها ۴ پل است.

این حالت‌ها ادامه دارد، اما دست‌کم باید ۲ پل بسته شوند که مربوط به حالت‌های ۵ تا ۸ است.

۶. (الف)

$$۵۰۰ + \text{وزن کیت} = \text{وزن جین}$$

$$۱۰۰۰ + \text{وزن کیت} = \text{وزن لین}$$

بنابراین کیت از همه سبک‌تر و لین از همه سنگین‌تر است.

۷. (ه) باید با راهبرد حدس و آزمایش چهار عدد از میان عددهای ۵، ۶، ۹، ۱۱

و ۱۴ را طوری پیدا کنیم که حاصل جمع دو به دوی آن‌ها برابر باشند.

این چهار عدد عبارت‌اند از: ۶، ۹، ۱۱ و ۱۴.

$$\begin{cases} ۱۴ + ۶ = ۲۰ \\ ۱۱ + ۹ = ۲۰ \end{cases}$$

در نتیجه باید عددی را پیدا کنیم که جمع آن با عدد ۵، برابر ۲۰ شود.

$$۲۰ - ۵ = ۱۵$$

۸. (ج) تعداد مربع‌های کوچک ۱۸ است.

$$۱۸ \div ۳ = ۶$$

یک‌سوم ۱۸ مربع می‌شود ۶ مربع. بنابراین ۶ مربع را آبی می‌کند.

$$۱۸ \div ۲ = ۹$$

نصف ۱۸ مربع می‌شود ۹ مربع. بنابراین ۹ مربع را زرد می‌کند.

$$۶ + ۹ = ۱۵$$

روی هم ۱۵ مربع را آبی یا زرد می‌کند.

$$۱۸ - ۱۵ = ۳$$

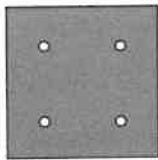
در نتیجه ۳ مربع باقی می‌ماند که آن‌ها را قرمز می‌کند.

۹. (ب)

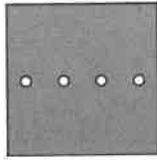
پدرام	۲	۱۲
نیما	۳	۱۸
مجموع	۵	۳۰

\curvearrowright
 $\times 6$
 $18 - 12 = 6$

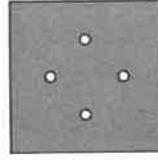
۱۰. (د) بررسی گزینه‌ها:



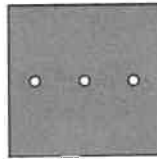
(ا)



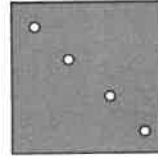
(ب)



(ج)



(د)



(ه)

راه حل مسئله‌های چهار امتیازی

۱۱. (د) اگر از عرض مبل سه نفره، عرض مبل دونفره را کم کنیم، عرض مبل یک‌نفره بدون در نظر گرفتن دسته‌ها به دست می‌آید؛ یعنی

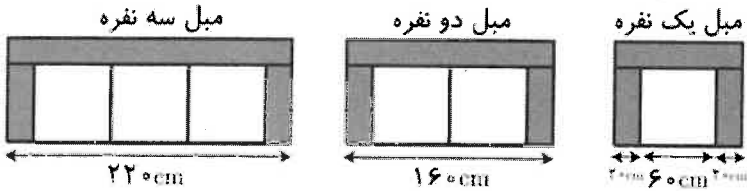
$$220 - 160 = 60 \text{ cm}$$

اگر دو برابر عرض مبل یک‌نفره بدون در نظر گرفتن دسته‌ها را از عرض مبل دونفره کم کنیم، عرض دو دسته به دست می‌آید؛ یعنی

$$160 - (2 \times 60) = 160 - 120 = 40 \text{ cm}$$

حال اگر عرض دو دسته را با عرض میبل یک نفره بدون در نظر گرفتن دسته‌ها جمع کنیم، عرض میبل یک نفره به دست می‌آید؛ یعنی

$$۶۰ + ۴۰ = ۱۰۰ \text{ cm}$$



۱۲. (ج) (۱) حرف اول و آخر کلمه‌ی DAD یکی است، بنابراین باید روی کلیدها دنبال عددی بگردیم که رقم یکان و صدگان‌شان یکسان باشد. پس کلید ۴۱۴ قفل DAD را باز خواهد کرد. بنابراین عدد ۴ متناظر با حرف D و عدد یک متناظر با حرف A خواهد بود.

(۲) قفل HAB متناظر کلیدی است که دهگان‌ش ۱ باشد، بنابراین تنها کلیدی که این قفل را باز می‌کند، عدد ۸۱۲ است. پس B متناظر ۲ و H متناظر ۸ است (توجه کنید که کلیدهای قفل‌های ABD و AHD هر دو یکان ۴ و صدگان ۱ دارند و دو کلید ۱۲۴ و ۱۸۴ این ویژگی را دارند. بنابراین برای انتخاب در مرحله‌ی (۲) مناسب نیستند).

(۳) قفل ABD متناظر کلید ۱۲۴ و قفل AHD متناظر کلید ۱۸۴ است و تنها قفل BHD است که کلیدش در صورت مسئله مشخص نیست که آن هم کلید ۲۸۴ است.

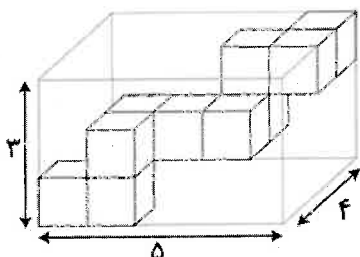
۱۳. (ج) اگر تارا ۲۴ رقم از ۳۱ رقم را حذف کند، مثل این است که ۷ رقم از ۳۱ رقم را انتخاب کرده است (چون $۳۱ - ۲۴ = ۷$).

برای آنکه بزرگ‌ترین عدد ۷ رقمی را به دست بیاوریم، باید اولین رقم از سمت چپ بزرگ‌ترین رقم (یعنی ۹) باشد و برای انتخاب دومین رقم از سمت چپ، اگر

دومین رقم ۹ را انتخاب کنیم، بعد از آن، دو رقم باقی می ماند که در مجموع عدد انتخابی ما ۴ رقمی می شود، پس نمی توانیم عدد ۹ را به عنوان رقم دوم انتخاب کنیم. همین طور اگر رقم ۸ را انتخاب کنیم، به همین مشکل برمی خوریم. بنابراین ۷ را به عنوان رقم دوم از سمت چپ انتخاب می کنیم و بعد رقم ۸ را و ...

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ & ۱۳ & ۱۴ & ۱۵ & ۱۶ & ۱۷ & ۱۸ & ۱۹ & ۲۰ & \rightarrow & ۹ & ۷ & ۸ & ۱ & ۹ & ۲ & ۰ \\
 & & & & & & \downarrow & & & & & & & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & & & & \\
 & & & & & & ۹ & & & & & & & & & & ۷ & ۸ & ۱ & ۹ & ۲ & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

۱۴. (ج)



۱۵. (د) با راهبرد حدس و آزمایش، جدول را حل می کنیم.

$a = 0$	$b = 2$	$\rightarrow 2$
$c = 1$	$d = 2$	$\rightarrow 3$
\downarrow	\downarrow	
۱	۴	

۱۶. (ه) نمی دانیم که پدارم در روز شنبه چند کیلومتر راه رفته است، پس به جای آن جای خالی (یا \square) می گذاریم.

روز	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سهشنبه	چهارشنبه
مسافت طی شده	\square	$\square + 2$	$\square + 4$	$\square + 6$	$\square + 8$
		\curvearrowright $+2$	\curvearrowright $+2$	\curvearrowright $+2$	\curvearrowright $+2$

بنابراین داریم

$$\square + (\square + 2) + (\square + 4) + (\square + 6) + (\square + 8) = 70$$

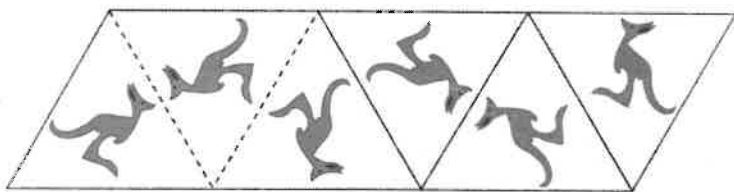
در جمع بالا، ۵ تا جای خالی داریم که به جای آن‌ها می‌توان نوشت: $5 \times \square$.

$$5 \times \square + 20 = 70$$

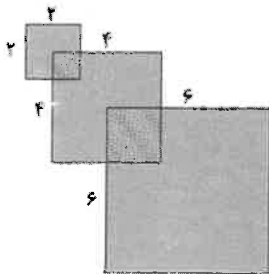
با حدس و آزمایش \square را به دست می‌آوریم که می‌شود: $\square = 10$.

روز سه‌شنبه $\square + 6$ کیلومتر راه رفته است، پس داریم $16 \text{ km} = \square + 6$.

۱۷. (ه)



۱۸. (ب)



$$(2 \times 2) + (4 \times 4) + (6 \times 6) = 4 + 16 + 36 = 56$$

مساحت قسمت‌های هاشورخورده دوبار محاسبه شده است که باید یک

بار آن را کم کنیم. مساحت قسمت هاشورخورده‌ی بالایی برابر است با $\frac{1}{4}$

مساحت مربع اولی؛ یعنی

$$\frac{1}{4} \times (2 \times 2) = \frac{1}{4} \times 4 = \frac{4}{4} = 1$$

مساحت قسمت هاشورخورده‌ی پایینی برابر است با $\frac{1}{4}$ مساحت مربع دومی؛ یعنی

$$\frac{1}{4} \times (4 \times 4) = \frac{1}{4} \times 16 = \frac{16}{4} = \frac{4}{1} = 4$$

بنابراین مساحت کل شکل برابر است با

$$56 - 1 - 4 = 51$$

۱۹. (ج) تعداد گل‌های آن سه نفر دیگر ۵، ۷ و ۸ است. این ۳ عدد با هم مساوی نیستند و مجموع آن‌ها ۲۰ است ($20 = 5 + 7 + 8$)، بنابراین بنا بر صورت مسئله، تعداد گل‌های محمد باید از ۵، ۷ و ۸ کوچک‌تر باشد، یعنی می‌تواند ۴ یا ۳ یا ۲ یا ۱ باشد که بزرگ‌ترین آن ۴ است. حالت‌های دیگری نیز ممکن است اتفاق بیفتد؛ مثلاً ۴، ۷ و ۹ که در این حالت محمد حداکثر می‌تواند ۳ گل که کم‌تر از ۴ گل است، زده باشد. همچنین محمد نمی‌تواند بیش‌تر از ۴ گل زده باشد، چون ممکن نیست ۳ عدد نامساوی با هم و بزرگ‌تر از ۵ داشته باشیم که جمع آن‌ها ۲۰ شود.

۲۰. (د) برای مثال، اگر پول برنا ۵ تومان باشد، همه‌ی گزینه‌ها را حساب می‌کنیم تا ببینیم کدام از همه بیش‌تر است.

$$\text{گزینه‌ی «الف» : } \begin{cases} 5 \times 2 = 10 \\ 10 + 1 = 11 \\ 11 - 1 = 10 \end{cases}$$

$$\text{گزینه‌ی «ب» : } \begin{cases} 5 + 1 = 6 \\ 6 - 1 = 5 \\ 5 \times 2 = 10 \end{cases}$$

$$\text{گزینه‌ی «ج» : } \begin{cases} 5 \times 2 = 10 \\ 10 - 1 = 9 \\ 9 + 1 = 10 \end{cases}$$

$$\text{گزینه‌ی «د» : } \begin{cases} 5 + 1 = 6 \\ 6 \times 2 = 12 \rightarrow \text{بزرگ‌ترین} \\ 12 - 1 = 11 \end{cases}$$

$$\text{گزینه‌ی «ه» : } \begin{cases} 5 - 1 = 4 \\ 4 + 1 = 5 \\ 5 \times 2 = 10 \end{cases}$$

می‌توان به جای عدد ۵، عدد دیگری را نیز انتخاب کرد.

راه حل مسئله‌های پنج امتیازی

۲۱. (الف)

۲۲. (د) اگر عدد ۱ در یکی از خانه‌های B یا C یا D یا E قرار بگیرد،

A	B	C
D		
E		

آن‌گاه به‌ناچار در خانه‌ی A یکی از عددهای ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ قرار می‌گیرد که از عدد یک بزرگ‌تر است، اما بنا بر صورت مسئله عددهای پایینی A و عددهای سمت راستی A باید از خود A بزرگ‌تر باشند. پس در خانه‌ی A تنها باید عدد ۱ قرار بگیرد.

۱	۲	۳
۴		
۵		

حالت ۱

۱	۴	۴
۳		
۵		

حالت ۲

۱	۲	۵
۳		
۴		

حالت ۳

۱	۳	۴
۲		
۵		

حالت ۴

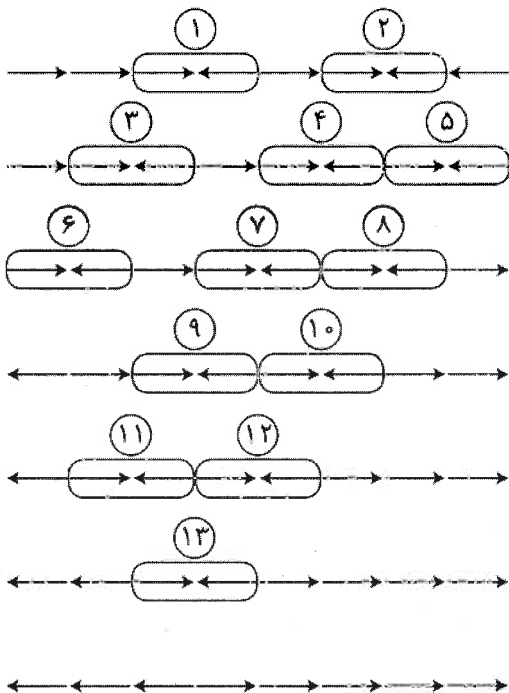
۱	۳	۵
۲		
۴		

حالت ۵

۱	۴	۵
۲		
۳		

حالت ۶

۲۳. (د)



۲۴. (ج) با راهبرد حدس و آزمایش، مسئله را حل می‌کنیم. اگر عددهایی را که هم مضرب ۲ و هم مضرب ۳ هستند، انتخاب کنیم، کم‌ترین تعداد به دست می‌آید

$$۲, ۴, (۶), ۸, ۱۰, (۱۲)$$

$$۳, (۶), ۹, (۱۲)$$

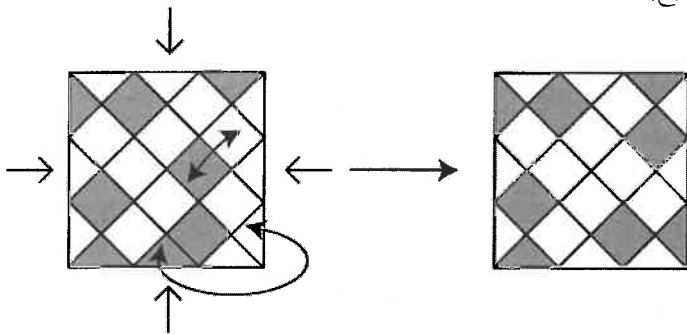
$$۳, ۳, ۴, ۶, ۵$$

$$\times 3 \downarrow \quad \times 2 \downarrow \quad \times 3 \downarrow \quad \times 2 \downarrow \quad \times 2 \downarrow$$

$$(۶) \quad (۶) \quad (۱۲) \quad (۱۲) \quad (۱۰)$$

که ۶، ۱۲ و ۱۰ سه عدد متفاوت هستند، پس کم‌ترین تعداد ۳ است.

۲۵. (ج)



۲۶. (ج) چون می‌خواهیم حداکثر مهره‌ها را در کیسه داشته باشیم و از هر پنج مهره‌ای که برمی‌داریم باید ۴ مهره سبز باشد و یکی قرمز و نیز از هر شش مهره که برمی‌داریم، باید ۵ مهره قرمز باشد و یکی سبز؛ در نتیجه باید ۴ مهره‌ی سبز و ۵ مهره‌ی قرمز در کیسه داشته باشیم و $۵ + ۴ = ۹$.

توجه کنید که اگر ۵ مهره‌ی سبز در کیسه داشته باشیم، ممکن است هر پنج

مهره‌ای که از کیسه درمی‌آوریم سبز باشد و اگر ۶ مهره‌ی قرمز در کیسه داشته باشیم، ممکن است هر شش مهره‌ای که از کیسه در می‌آوریم قرمز باشد.

۲۷. (د)

آرش ← زوج ۵۲, ۳۲

بهرام ← مضرب ۳ ۴۵, ۳۳, ۲۴

پدرام ← مضرب ۵ ۳۰, ۲۵, ۲۰

آرش آخرین نفری بوده که گوی‌ها را برداشته است چون ۲۴ و ۲۰ را که زوج‌اند، به ترتیب بهرام و پدرام قبل از آرش برداشته‌اند.


بهرام قبل از پدرام گوی‌ها را برداشته است چون عدد ۴۵ را که مضرب ۵ و ۳ است، بهرام برداشته است. پس ترتیب آن‌ها به صورت زیر است:

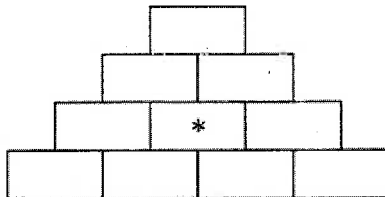
بهرام، پدرام، آرش

۲۸. (د) جمع دو عدد فرد، عددی زوج است؛ مثال: $۱ + ۳ = ۴$.

جمع دو عدد زوج، عددی زوج است؛ مثال: $۲ + ۴ = ۶$.

جمع یک عدد فرد با یک عدد زوج، عددی فرد است؛ مثال: $۱ + ۴ = ۵$.

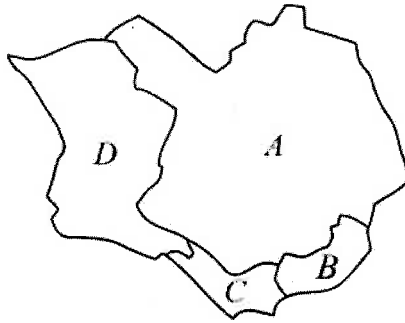
می‌توان جدول را طوری پر کرد که از هر شکل ، دو تا فرد و یکی زوج باشد (هر سه عدد نمی‌توانند فرد باشند). بنابراین مانند شکل زیر، ۶ عدد فرد داریم



حال طوری این ۶ عدد فرد را در جدول قرار می‌دهیم که خانه‌ی * نیز فرد شود.

فرد			
زوج	فرد		
فرد	فرد	زوج	
فرد	زوج	فرد	فرد

۲۹. (ه)



ابتدا ناحیه‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم و به دلخواه، از یک ناحیه شروع به رنگ‌آمیزی می‌کنیم.

مرحله‌ی ۱: رویا برای رنگ‌آمیزی ناحیه‌ی A ، می‌تواند چهار رنگ را انتخاب کند.

مرحله‌ی ۲: ناحیه‌ی B با ناحیه‌ی A مرز مشترک دارد، پس رویا رنگی را که در ناحیه‌ی A انتخاب کرده، در ناحیه‌ی B نمی‌تواند استفاده کند. بنابراین رویا برای رنگ‌آمیزی ناحیه‌ی B ، می‌تواند از سه رنگ باقی‌مانده استفاده کند.

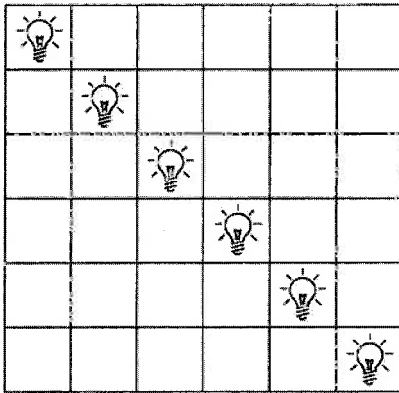
مرحله‌ی ۳: ناحیه‌ی C با دو ناحیه‌ی A و B مرز مشترک دارد، پس رنگ‌هایی را که در ناحیه‌های A و B در مراحل قبل انتخاب شده، در ناحیه‌ی C نمی‌توان استفاده کرد. بنابراین برای رنگ‌آمیزی ناحیه‌ی C ، می‌توان از دو رنگ باقی‌مانده استفاده کرد.

مرحله ۴: ناحیه D با دو ناحیه A و C مرز مشترک دارد، پس رنگ‌هایی را که در ناحیه‌های A و C در مراحل قبل استفاده شده، در ناحیه D نمی‌توان استفاده کرد. بنابراین برای رنگ‌آمیزی ناحیه D ، می‌توان از دو رنگ باقی‌مانده استفاده کرد.

به‌طور خلاصه برای ناحیه A از ۴ رنگ، برای ناحیه B از ۳ رنگ، برای ناحیه C از ۲ رنگ و برای ناحیه D از ۲ رنگ می‌توان استفاده کرد.

$$4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$

۳۰. (ج)



با حالت‌گیری و با توجه به دو نکته‌ی زیر، می‌توان نشان داد که با پنج لامپ نمی‌توان همه‌ی خانه‌های جدول را روشن کرد.

نکته‌ی اول آنکه هر سطر یا ستون کناری باید حتماً یک لامپ روشن داشته باشد؛ (چرا؟) نکته‌ی دیگر آنکه هیچ دو سطر یا دو ستون متوالی نمی‌تواند خالی از چراغ روشن باشد. (چرا؟)