

راه حل مسابقه‌ی ریاضی کانگورو ۲۰۰۹

راه حل مسئله‌های سه امتیازی

۱. (د) $1800 = 200 \times 9$.

۲. (ب) داخل دایره و مربع است، ولی داخل مثلث نیست.

۳. (ب) پاسخ، همه‌ی اعداد صحیح بین ۳ و ۱۹ و خود آنها را دربر می‌گیرد.

۴. (ج) باید ۴ را کنار بگذارید. (چون فقط یک رقم ۴ در این عدد وجود دارد. این رقم باید وسط عدد قرار بگیرید تا عدد از چپ به راست همان‌طور خوانده شود که از راست به چپ خوانده می‌شود.)، سپس باید هر دو تا رقم ۲ یا دو تا رقم ۳ ای را که کنار هم هستند، بردارید تا به ۱۳۳۳۱ یا ۱۲۳۲۱ دست یابید.

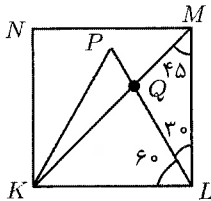
۵. (الف) چون سیب نه در جعبه‌ی سفید است و نه در جعبه‌ی سبز، پس باید در جعبه‌ی قرمز باشد. حالا می‌دانیم که شکلات در جعبه‌ی قرمز نیست، چون سیب داخل آن است. پس شکلات باید در جعبه‌ی سفید باشد.

۶. (ب) چون قطر، زاویه‌ی $\angle NML$ را که یک زاویه‌ی قائمه است،

نصف می‌کند، پس $\angle QML$ ، 45° است. $\angle MLQ$ با $\angle KLP$ که یکی از زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع است، 90° می‌شود. پس $\angle MLQ$ زاویه‌ی 30° است. در مثلث LQM می‌دانیم

$$\angle LQM = 180^\circ - (\angle MLQ + \angle LMQ)$$

$$\angle LQM = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$



۷. (د) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ از این پل روی زمین قرار گرفته است، یعنی $\frac{1}{4}$ آن روی آب است. بنابراین طول پل دو برابر عرض رودخانه است. $120 \times 2 = 240 \text{ m}$.

۸. (ج) همان‌طور که به سادگی در شکل دیده می‌شود، ضلع هر یک از مربع‌های بزرگ‌تر 40 cm و 60 cm است. با دنبال کردن خط پررنگ از بالای شکل، طول آن به صورت زیر به دست می‌آید.

$$2 \times 20 \text{ cm} + 5 \times 40 \text{ cm} + 2 \times 60 \text{ cm} + 3 \times 20 \text{ cm} \\ = 40 \text{ cm} + 200 \text{ cm} + 120 \text{ cm} + 60 \text{ cm} = 420 \text{ cm}$$

۹. (ج) هر گره به ۴ تا پنجه دارد و هر سنگ، یک بینی. پس چهار برابر تعداد گره‌ها، دو برابر تعداد سنگ‌ها است. پس تعداد گره‌ها نصف تعداد سنگ‌ها است.

۱۰. (ه) رقمی که برای ساختن آن به بیش‌ترین تعداد چوب‌کبریت نیاز داریم، رقم \square است که برای ساختن آن ۷ چوب‌کبریت به‌کار می‌رود. بنابراین بیش‌ترین چوب‌کبریت برای ساختن عدد دورقمی $\square\square$ به‌کار می‌رود که تعداد آن‌ها ۱۴ تا است.

راه حل مسئله‌های چهار امتیازی

۱۱. (ج) مقسوم‌علیه‌های ۷۸ عبارت‌اند از: ۱، ۲، ۳، ۶، ۱۳، ۲۶، ۳۹ و ۷۸. چون n باید از 0° بزرگ‌تر باشد، کوچک‌ترین مقسوم‌علیه‌ای که می‌تواند مورد نظر باشد، ۳ است. ۶ تا از مقسوم‌علیه‌های ۷۸ بزرگ‌تر یا مساوی ۳ هستند.

۱۲. (ج) با رسم پاره‌خطی از D تا B ، چهارضلعی را به دو مثلث قائم‌الزاویه تقسیم کنید. حالا دو مثلث قائم‌الزاویه دارید که اندازه‌ی ضلع‌های مجاور به زاویه‌ی قائمه‌ی آنها را می‌دانید و می‌توانید مساحت آنها را حساب کنید.

$$\begin{aligned} \text{مساحت یکی از مثلث‌ها} &= \frac{33}{2} = 2 \div 11 \times 3 \\ \text{مساحت مثلث دیگر} &= \frac{63}{2} = 2 \div 7 \times 9 \\ \text{مساحت چهارضلعی} &= \frac{33}{2} + \frac{63}{2} = \frac{96}{2} = 48 \end{aligned}$$

۱۳. (د) اختلاف تعداد پسرها و دخترها هر هفته ۲ تا کم می‌شود. اختلاف اولیه ۱۶ = ۲۳ - ۳۹ بوده است. پس $8 = 2 \div 16$ هفته طول می‌کشد تا تعداد پسرها با تعداد دخترها برابر شود. در این زمان تعداد کل اعضای انجمن برابر است با:

$$39 + 23 + 8 \times (6 + 8) = 62 + 8 \times 14 = 62 + 112 = 174$$

۱۴. (ه) با کم کردن مساحت قسمت سیاه از مساحت مستطیلی که شامل این قسمت و قسمت سفید است، مساحت قسمت سفید به دست می‌آید:

$$(8 \times 10) - 37 = 80 - 37 = 43$$

حال با کم کردن مساحت قسمت سفید از مساحت مستطیلی که شامل قسمت سفید و قسمت خاکستری است، مساحت قسمت خاکستری به دست می‌آید: $65 = 108 - 43 = (9 \times 12) - 43$.

۱۵. (د) مجموع اعداد نوشته شده روی کارت‌ها برابر است با: $۱+۲+\dots+۸ = ۳۶$. بنابراین مجموع اعداد نوشته شده روی کارت‌های هر دسته برابر ۱۸ است. برای آنکه مجموع ۳ عدد نوشته شده روی کارت‌های دسته‌ی A برابر ۱۸ شود، سه حالت $۳+۷+۸$ ، $۴+۶+۸$ و $۵+۶+۷$ ممکن است. تنها موردی که در باره‌ی دسته‌ی B در همه‌ی این حالت‌ها صدق می‌کند، گزینه‌ی (د) است.

۱۶. (ج) محیط هر یک از شکل‌ها برابر محیط مربع است. محیط مربع برابر است با: $۳۶ \text{ cm} = ۹ \text{ cm} \times ۴$. پس هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر است با: $۱۲ \text{ cm} = ۳۶ \text{ cm} \div ۳$. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود طول مستطیل برابر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع است. عرض مستطیل به این صورت به دست می‌آید:

$$۱۸ = (۳۶ \div ۲) - ۱۲$$

۱۷. (ب) بزرگ‌ترین مکعب ممکن ابعادی برابر $۲۰ \times ۲۰ \times ۲۰$ دارد. هر بعد مکعب مستطیل را بر ۲۰ تقسیم کنید تا حجم آن برحسب مکعب مورد نظر به دست آید:

$$\frac{۴۰}{۲۰} \times \frac{۴۰}{۲۰} \times \frac{۶۰}{۲۰} = ۲ \times ۲ \times ۳ = ۱۲$$

۱۸. (ه) او از جمعه آغاز می‌کند و هر هفته $۴ \times ۶ + ۲۵ = ۴۹$ صفحه از کتاب را می‌خواند. پس در ۵ هفته یعنی ۳۵ روز ۲۴۵ صفحه را خواهد خواند. روز بعد دوباره جمعه است و او ۲۵ صفحه‌ی دیگر را می‌خواند، ۲۰ صفحه از کتاب باقی می‌ماند که خواندن آن ۵ روز دیگر وقت می‌برد. پس خواندن کتاب $۴۱ = ۳۵ + ۱ + ۵$ روز طول می‌کشد.

۱۹. (د) چهار رتبه‌ی کسب‌شده، با شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ شماره‌گذاری شده‌اند، بنابراین تنها حالتی که می‌توان با استفاده از سه تا از شماره‌ها، مجموع ۶ را به دست آورد، حذف عدد ۴ است. پس، شاهین در رتبه‌ی چهارم قرار دارد. بنابراین بابک در رتبه‌ی دوم است. ($۲ = ۶ - ۴$) چون بابک بهتر از آرش عمل کرده

پس آرش در رتبه‌ی سوم است. فقط دانیال می‌ماند که رتبه‌ی اول را کسب کرده است.

۲۰. (ج) طول ضلع‌های مستطیل‌ها برابر اعداد صحیحی است که مقسوم‌علیه‌های ۲۰۰۹ هستند. این اعداد عبارت‌اند از: ۱، ۷، ۴۱، ۴۹، ۲۸۷، ۲۰۰۹. چون هر جفت مستطیل مثل ۱×۲۰۰۹ و ۱×۲۰۰۹ یکسان هستند، پس فقط ۳ تا مستطیل متفاوت وجود دارد.

راه حل مسئله‌های پنج امتیازی

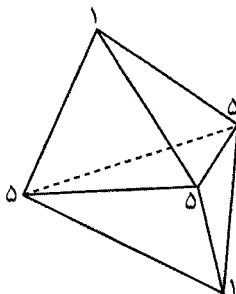
۲۱. (ج)

$$\begin{aligned} ۱۸ \times ۵۵^\circ &= (۲^3) ۱۸ \times ۵۵^\circ = ۲۵۴ \times ۵۵^\circ = ۲^4 \times ۲۵^\circ \times ۵۵^\circ \\ &= ۱۶ \times ۱۰۵^\circ \end{aligned}$$

حاصل برابر است با: ۱۶ با ۵° تا صفر در جلوی آن که عددی ۵۲ رقمی است.

۲۲. (ب) چون ۵۵ بر هر دو عدد ۵ و ۱۱ بخش‌پذیر است، پس بخش‌پذیری بر ۵۵ در حالی‌که قرار است دو تا از عبارت‌ها نادرست باشند، ممکن نیست. اگر عدد موردنظر بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد و بر ۵۵ نباشد، باید از ۱° هم بزرگ‌تر باشد و این باعث می‌شود که سه تا از عبارت‌ها نادرست باشند. بنابراین n باید بر ۵ بخش‌پذیر و از ۱° کوچک‌تر باشد.

۲۳. (ج)



۲۴. (ه) رقم ۲، ۳۵ بار در صدگان شماره‌های هر یک از اتاق‌های طبقه‌ی دوم استفاده می‌شود، ۱۰ بار در دهگان شماره اتاق‌های هر طبقه و ۴ بار در یکان شماره‌های هر طبقه.

$$۳۵ + ۵ \times ۱۰ + ۵ \times ۴ = ۱۰۵$$



۲۵. (ج) مساحت شکل برابر است با: $(۱۰ \text{ cm})^2 = ۱۰۰ \text{ cm}^2$

منهای مساحت چهار مربع کوچک و چهار مثلث. چون مربع‌ها با هم برابرند پس می‌دانیم که ضلع هر کدام ۲ cm است.

$(۱۰ \text{ cm} - ۶ \text{ cm}) \div ۲ = ۲ \text{ cm}$. مساحت هر مربع $۲ \times ۲ = ۴$ سانتی‌متر

مربع است. چون مثلث‌ها با هم برابرند و هر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است با کنار هم گذاشتن همه‌ی آنها می‌توان یک مربع به ضلع ۶ سانتی‌متر به‌دست آورد. مساحت مربع به‌دست آمده $۶ \times ۶ = ۳۶$ سانتی‌متر مربع است.

پس مساحت قسمت سایه‌خورده برابر است با: $۱۰۰ - (۱۶ + ۳۶) = ۴۸$ سانتی‌متر مربع.

۲۶. (ج) چون اولین سطر و اولین ستون فقط شامل نشانه‌های a و b هستند، می‌توانیم a و b را به سادگی پیدا کنیم.

$$a + b + a = ۱۱ \implies ۲a + b = ۱۱ \implies b = ۱۱ - ۲a$$

$$a + b + b = ۱۰ \implies a + ۲b = ۱۰$$

با جایگزین کردن b در عبارت پایین خواهیم داشت:

$$a + ۲ \times (۱۱ - ۲a) = ۱۰$$

$$a + ۲۲ - ۴a = ۱۰$$

$$۱۲ = ۳a$$

$$a = ۴$$

پس $b = 11 - 2 \times 4 = 11 - 8 = 3$. برای یافتن c ، مقادیر a و b را در معادله‌ای شامل نشانه‌ی c ، جایگزین می‌کنیم.

$$a + c + a = 9$$

$$c + 2 \times 4 = 9$$

$$c + 8 = 9$$

$$c = 1$$

با دانستن مقادیر هر سه متغیر به سادگی می‌توان $a + b - c = 4 + 3 - 1 = 6$ را به دست آورد. (راه حل «هوشمندانه‌تر»ی هم برای حل این مسئله وجود دارد.)

۲۷. (ه) هر یک از مجموعه‌های 0 تا 6 نقطه‌ای، 8 بار در یک دست کامل دومینو دیده می‌شوند. هر بار در کنار یکی از 7 عدد 0 تا 6 ، و یک بار بیشتر چون هر یک از اعداد روی یکی از مهره‌ها به صورت تکراری دیده می‌شوند. پس مجموع همهٔ نقطه‌ها برابر خواهد بود با:

$$8 \times (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0) = 8 \times 21 = 168$$

۲۸. (د) با ادامه دادن جدول 4×2 متوجه می‌شوید که حاصل جمع و حاصل تفریق به دست آمده در هر سطر دو برابر اعداد به دست آمده در دو سطر بالاتر از آن است. بدین ترتیب با استفاده از اعداد 96 ، 64 در سطر 7 ، می‌توانید اعداد 48 و 32 را برای سطر 5 ، اعداد 24 و 16 را برای سطر 3 و اعداد 12 و 8 را برای سطر اول پیدا کنید. حاصل جمع این دو عدد برابر 20 است.

۲۹. (الف) کمترین تعداد در صورتی به دست می‌آید که بیشترین تعداد ممکن از افراد این گروه پای چپ و راستشان 2 سایز اختلاف داشته باشد. اگر اختلاف سایز پاهای چپ و راست همه‌ی افراد گروه 2 سایز باشد، آنها باید همگی کفش‌هایی

با سایز فرد یا همگی کفش‌هایی با سایز زوج بخرند. پس دست‌کم یک نفر در این گروه هست که اختلاف سایز پای چپ و راستش یک سایز است. بنابراین سایز کفش‌های خریداری شده باید یکی از حالت‌های ممکن زیر باشد: ۳۶، ۳۷، ۳۹، ۴۱، ۴۳ و ۴۵ یا ۳۸، ۳۹، ۴۱، ۴۳ و ۴۵ یا ۳۶، ۳۸، ۴۰، ۴۰، ۴۳، ۴۱ و ۴۵ یا ۳۶، ۳۸، ۴۰، ۴۲، ۴۳ و ۴۵ یا ۴۲، ۴۴ و ۴۵. در هر یک از این حالت‌ها ۶ جفت کفش خریداری شده است و با توجه به اینکه دوتا کفش اضافه آمده است، پس ۵ نفر کفش پوشیده‌اند.

۳۰. (الف)

A	B	۲	C	D
		۳	۱	B

در شکل بالا یکی دیگر از مربع‌ها را با رنگ B پر کرده‌ایم. بدین ترتیب مربع ۱ باید با رنگ A پر شود و مربع ۲ با رنگ D . در این صورت رنگی برای مربع ۳ باقی نمی‌ماند. پس پر کردن آن مربع با رنگ B درست نبوده است و باید آن را با رنگ A پر می‌کردیم. به همین ترتیب می‌توان فهمید که رنگ D برای پر کردن مربع زیر آن و رنگ A برای پر کردن مربع سایه‌خورده مناسب است.

A	B		C	D
				A
				D
				A